

Example of the mdugm fonts.

Paul Pichareau

29 janvier 2006

Résumé

The package mdugm consists of a full set of mathematical fonts, designed to be combined with urw garamond as the main text font.

This example is extracted from the excellent book *Mathématiques pour la physique et les physiciens*, W. Appel, Paris, éd. H.& K., 1999.

1 Dérivation de la transformée de Fourier

On a la relation très importante entre T.F. et dérivation :

Théorème 10.22 Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ une fonction décroissant suffisamment vite pour que $x \mapsto x^k f(x)$ soit également dans $L^1(\mathbb{R})$ pour $k = 0, \dots, n$. Alors \tilde{f} est n fois dérivable et on a

$$\mathcal{F} \left((-2i\pi x)^k f(x) \right) = \tilde{f}^{(k)}(\nu) \quad \text{pour } k = 1, \dots, n.$$

Inversement, si $f \in L^1(\mathbb{R})$, si f est de classe \mathcal{C}^n et si, de plus, les dérivées successives $f^{(k)}$ sont intégrables pour $k = 1, \dots, n$, alors on a

$$\mathcal{F} \left(f^{(m)}(x) \right) = (2i\pi\nu)^m \tilde{f}(\nu) \quad \text{pour } k = 1, \dots, n.$$

Notamment, on retiendra que :

$$\mathcal{F} \left(f'(x) \right) = 2i\pi\nu \tilde{f}(\nu) \quad \text{et} \quad \mathcal{F} \left(-2i\pi x f(x) \right) = \frac{d}{d\nu} \tilde{f}(\nu).$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $\nu \mapsto f(x)e^{-2i\pi\nu x}$ est de classe \mathcal{C}^∞ , de dérivée k -ième bornée en module par $\left| (2\pi x)^k f(x) \right|$, qui est intégrable. On applique alors le théorème de dérivation sous le signe somme, qui nous donne

$$\tilde{f}'(\nu) = \int \frac{d}{d\nu} \left[f(x)e^{2i\pi\nu x} \right] dx = \int (-2i\pi x) f(x) e^{-2i\pi\nu x} dx$$

puis, par une récurrence immédiate, la première formule.

On rappelle que pour toute fonction intégrable ϕ , on a

$$\int \phi(x) dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R \phi(x) dx.$$

Puisque f' est intégrable, on a donc

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f')(v) &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f'(x) e^{-2i\pi vx} dx \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \left\{ [f'(x) e^{-2i\pi vx}]_{-R}^R + \int_{-R}^R (2i\pi vx) f(x) e^{-2i\pi vx} dx \right\}. \end{aligned}$$

Comme f est sommable *ainsi que sa dérivée*, f admet une limite nulle en $\pm\infty$. La formule précédente nous montre alors, en faisant tendre R vers l'infini, que

$$\int f'(x) e^{-2i\pi vx} dx = \int (-2i\pi vx) f(x) e^{-2i\pi vx} dx,$$

ce qui nous montre la deuxième formule pour $k = 1$. Une récurrence sur k permet de conclure.

Walter Appel, *Mathématiques pour la physique et les physiciens*