1 Beispiel

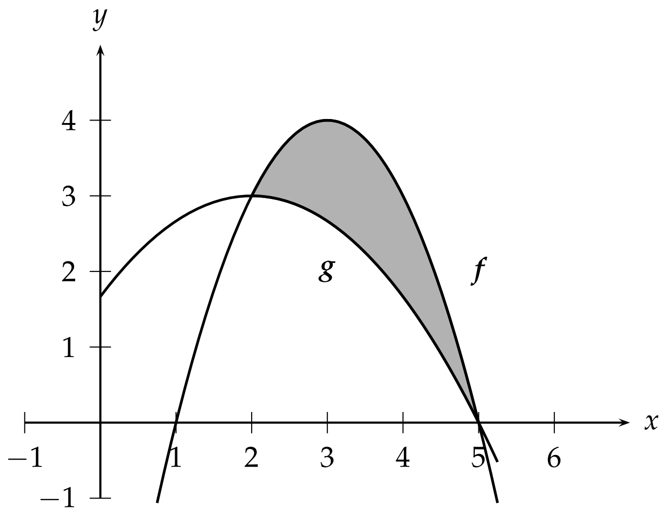
Gegeben sind die beiden Funktionen

$$f(x) = -x^2 + 6x - 5 \tag{6.82}$$

und

$$g(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{5}{3} \tag{6.83}$$

Welchen Inhalt besitzt die Fläche, die von den Graphen von f und g im 1. Quadranten umschlossen wird?



1. Bestimmung der Schnittpunkte durch Gleichsetzen der beiden Gleichungen:

$$f(x) = g(x) \tag{6.84}$$
$$-x^2 + 6x - 5 = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{5}{3} \tag{6.85}$$
$$0 = \frac{2}{3}x^2 - \frac{14}{3}x + \frac{20}{3} \tag{6.86}$$
$$0 = x^2 - 7x + 10 \tag{6.87}$$
$$0 = (x-2)(x-5) \tag{6.88}$$
$$\mathbb{L} = \{2;\ 5\} \tag{6.89}$$

2. Es gibt nur zwei Nullstellen, die beide im positiven Bereich liegen, sodass die Integrationsgrenzen festliegen:

$$F = \int_2^5 (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x \tag{6.90}$$

Die Differenz $g(x) - f(x)$ ist bereits durch Gl. **??** gegeben, deswegen wird diese gleich berücksichtigt (dies gilt nicht für Gl. **??**). Aus der Skizze ergibt sich, dass ein negativer Wert zu erwarten ist, denn in dem Integrationsintervall ist $g(x) < f(x)$:

$$F = \int_2^5 \left(\frac{2}{3}x^2 \frac{14}{3}x + \frac{20}{3}\right) \mathrm{d}x \tag{6.91}$$

$$= \left[\frac{2}{9}x^3 - \frac{14}{6}x^2 + \frac{20}{3}x\right]_2^5 \tag{6.92}$$

$$= \underbrace{\frac{2}{9}\cdot 125 - \frac{14}{6}\cdot 25 + \frac{20}{3}\cdot 5}_{\text{obere Grenze}} \underbrace{\;-\;}_{-} \underbrace{\left(\frac{2}{9}\cdot 8 - \frac{14}{6}\cdot 4 + \frac{20}{3}\cdot 2\right)}_{\text{untere Grenze}} \tag{6.93}$$

$$= \frac{500 - 1050 + 600}{18} - \frac{32 - 168 + 240}{18} \tag{6.94}$$

$$= \frac{50}{18} - \frac{104}{18} \tag{6.95}$$

$$= -\frac{54}{18} = -3 \tag{6.96}$$

Der Flächeninhalt beträgt 3FE!

3. Einige Überlegungen zu den Ausgangsgleichungen:
   Wie bereits des öfteren erwähnt, kann eine Darstellung in Scheitelpunktsform oder in Produktform sehr hilfreich sein.
   Für $f(x)$ folgt:

$$f(x) = -x^2 + 6x - 5 = -\left(x^2 - 6x + 5\right) \tag{6.97}$$

$$= -\left(x - 1\right)\left(x - 5\right) \tag{6.98}$$

   Damit liegen die Nullstellen fest: $\mathbb{L} = \{1; 5\}$. Für die Scheitelpunktsform ergibt sich:

$$f(x) = -x^2 + 6x - 5 = -\left(x^2 - 6x + 5\right) \tag{6.99}$$

$$= -\left(\underbrace{x^2 - 2\cdot 3\cdot x + 3^2}_{(x-3)^2} \underbrace{- 3^2 + 5}_{-4}\right) \tag{6.100}$$

und daher $SP(3;4)$. Gleiches lässt sich mit $g(x)$ erreichen:

$$g(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{5}{3} \tag{6.101}$$
$$= -\frac{1}{3}\left(x^2 - 4x - 5\right) \tag{6.102}$$
$$= -\frac{1}{3}(x+1)(x-5) \qquad \boxed{\mathbb{L} = \{-1;5\}} \tag{6.103}$$
$$g(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{5}{3} \tag{6.104}$$
$$= -\frac{1}{3}\left(x^2 - 4x - 5\right) \tag{6.105}$$
$$= -\frac{1}{3}\left(x^2 - 2 \cdot 2 \cdot x + 2^2 - 2^2 - 5\right) \tag{6.106}$$
$$= -\frac{1}{3}\left((x-2)^2 - 9\right) \tag{6.107}$$
$$= -\frac{1}{3}(x-2)^2 + 3 \qquad \boxed{SP(2;3)} \tag{6.108}$$